Aequivalenz einer Variante des Satzes von Ramsey mit einem Satz über Folgen in geordneten Mengen

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979, S.24-26

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Aequivalenz einer Variante des Satzes von Ramsey mit einem Satz über Folgen in geordneten Mengen

Von **Theodor Kaluza,** Hannover

Eingegangen am 10.11.78

Es sei M eine durch eine Relation $\leq$ vollständig (total, linear) geordnete Menge, α eine der Kardinalzahlen 2, 3, ... oder **a**, und $F \equiv x_0, x_1, \ldots$ eine Folge aus α paarweise verschiedenen Elementen von M; wir zählen dann die Ecken $v_0, v_1, \ldots$ des vollständigen Graphen K_α beliebig ab und färben danach für jedes n und alle $j > n$

(B) die Kante v_n —— v_j grün, wenn in M $x_n < x_j$ ist, und rot, wenn in M $x_n > x_j$ ist;

den ecken-indizierten und nach (B) 2-gefärbten K_α nennen wir *das größer-kleiner-Bild von F,* – kurz: *gk-Bild;*

beim Übergang zu Teilfolgen

$$x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \qquad n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots \quad (!)$$

von F und/oder zu vollständigen Teilgraphen mit den Ecken

$$v_{n_0}, v_{n_1}, \ldots \qquad n_0 < n_1 < \ldots$$

des ecken-indizierten und 2-gefärbten K_α wird die zur Benutzung von (B) eigentlich nötige Umbenennung

$$x_{n_0} = x_0', x_{n_1} = x_1', \ldots \qquad v_{n_0} = v_0', v_{n_1} = v_1', \ldots$$

jeweils stillschweigend vollzogen gedacht;

so ist auch die folgende, im übrigen evidente Aussage zu verstehen:

(E) – ist der indizierte und 2-gefärbte K_α gk-Bild der Folge F, so sind seine vollständigen Teilgraphen die gk-Bilder der Teilfolgen von F; – eine Teilfolge von F ist genau dann streng monoton, wenn ihr gk-Bild 1-farbig ist: monoton wachsend, wenn alle Kanten grün sind, monoton fallend, wenn sie alle rot sind.

Für $\alpha \geq 3$ gibt es 2-Färbungen des K_α, die nicht bei jeder Indizierung der Ecken das gk-Bild einer Folge sind, und für $\alpha \geq 5$ gibt es sogar 2-Färbungen des K_α, die bei keiner Indizierung das gk-Bild einer Folge ergeben; – Beispiele s. u. Bem. 1. Es gilt aber der

Hilfssatz: Jeder 2-gefärbte $K_{\mathbf{a}}$ enthält einen $K_{\mathbf{a}}'$ als Teilgraphen, dessen Ecken so abgezählt werden können, daß er gk-Bild einer Folge ist.

Beweis: Wenn es in dem gegebenen $K_{\mathbf{a}}$ eine unendliche Eckenfolge $V \equiv v_0, v_1, \ldots$ gibt, sodaß bei jedem n für alle $j > n$ alle Kanten v_n —— v_j dieselbe Farbe $f_n \in$

{grün, rot} haben, dann ist der von diesen Ecken aufgespannte K_a' gk-Bild z.B. der folgenden Folge rationaler Zahlen:

$$x_0 = 0 \qquad x_{n+1} = x_n + d_n \cdot 2^{-n},$$

wobei

$$d_n = 1 \text{ im Falle } f_n = \text{grün, und}$$
$$d_n = -1 \text{ im Falle } f_n = \text{rot}$$

sein soll;

daß es eine solche Eckenfolge V in jedem 2-gefärbten K_a gibt, wird bei dem üblichen unmittelbaren Beweis des Satzes von Ramsey, – daß jeder 2-gefärbte K_a einen 1-farbigen K_a als Teilgraphen enthält, –, durch Induktion gezeigt, wobei der Induktionsschluß das Schubfachprinzip benutzt. ■

Satz: Die beiden Aussagen

(Ram) jeder 2-gefärbte K_a enthält einen 1-farbigen K_a unter seinen Teilgraphen, – und

(Mon) jede unendliche Folge von paarweise verschiedenen Elementen einer vollständig geordneten Menge enthält eine streng monotone unendliche Teilfolge, –

sind äquivalent.

Beweis: (Ram) ⇒ (Mon): Das gk-Bild der Folge ist ein 2-gefärbter K_a; nach (Ram) enthält dieser einen 1-farbigen K_a als Teilgraphen, und nach (E) ist der gk-Bild einer (folglich existierenden) streng monotonen Teilfolge;

(Mon) ⇒ (Ram): Der gegebene K_a enthält nach dem Hilfssatz einen Teil-K_a, der gk-Bild einer Folge ist; diese enthält nach (Mon) eine streng monotone Teilfolge, und deren gk-Bild ist nach (E) ein (folglich existierender) 1-farbiger Teil-K_a des Teil-K_a aus dem Hilfssatz, – also auch des gegebenen K_a. ■

Die Aussage (Mon) im vorangehenden Satz kann ohne Benutzung des Satzes von Ramsey sehr einfach bewiesen werden; s. dazu [1].

Bemerkungen:

Bem. 1: Ein einfaches Beispiel für einen 2-gefärbten K_α, der nicht bei jeder Indizierung seiner Ecken gk-Bild einer Folge ist, ist bereits der K_3 mit zwei grünen Kanten und einer roten Kante; – allgemeiner dürfen die Ecken eines einfarbigen Weges einer Länge ≥ 2 nicht monoton numeriert werden, wenn dieser Weg durch eine Kante mit der anderen Farbe zu einem Kreis geschlossen wird;

das wohl einfachste Beispiel für einen 2-gefärbten K_α, der bei keiner Indizierung gk-Bild einer Folge ist, ist der K_5, zerlegt in zwei kantenfremde Hamilton-Kreise, von denen einer grün und der andere rot gefärbt ist: wäre er gk-Bild einer Folge $x_0, \ldots, x_4$, so müßte nach (B) sowohl x_0 als auch x_4 das mittlere der 5 Elemente in M sein, was unmöglich ist; – allgemeiner ist ein 2-gefärbter K_α bei keiner Indizierung seiner Ecken gk-Bild einer Folge, wenn er einen K_{4n+1}, zerlegt in n kantenfremde grüne und n kantenfremde rote Hamilton-Kreise enthält. (Solche Zerlegungen existieren.)

Bem. 2: Wenn man in (B) „und blau, wenn $x_n = x_j$ ist" hinzufügt, kann man mit 3-gefärbten vollständigen Graphen entsprechende Überlegungen für beliebige Folgen mit entsprechendem Erfolg anstellen.

Bem. 3: Es seien $r = r(p,q)$ die Ramsey-Zahlen mit der Bedeutung: jeder grün-rot-gefärbte K_r enthält einen grünen K_p oder einen roten K_q als Teilgraphen;

fragt man nach Zahlen $m = m(p,q)$, so daß jede Permutation der Zahlen $1, \ldots m$ eine monoton wachsende Teilfolge mit $\geq p$ Gliedern oder eine monoton fallende mit $\geq q$ Gliedern enthält, so folgt aus der Existenz der $r(p,q)$ und (E) ohne weiteres die Existenz der $m(p,q)$, und daß stets $m(p,q) \leq r(p,q)$ ist; die [2] zu entnehmende Abschätzung $m(p,q) \leq (p-1)(q-1)+1$ von Erdös und Szekeres ist – soweit man die Ramsey-Zahlen kennt – sehr viel besser, – der Überschuß der r über die m muß daher von denjenigen 2-Färbungen des K_{r-1} herrühren, die sich bei keiner Indizierung als gk-Bilder von Folgen auffassen lassen.

Literatur

[1] Th. Kaluza: Existenz streng monotoner Folgen in geordneten Mengen. Abh. d. Braunschw. Wiss. Ges. XXVIII (1977), 55–57.

[2] P. Erdös und G. Szekeres: A combinatorial Problem in Geometry. Comp. Math. **2** (1935), 463–470.